УДК 550.831+550.8

А.В. Чорний, Ю.І. Дубовенко

До теорії структурної задачі гравіметрії в комплексній площині

(Представлено академіком НАН України В.І. Старостенком)

Досліджено нове нелінійне інтегральне рівняння для контактної задачі у комплексній площині, яке залежить лише від одного параметра, густини тяжіючого шару. Доведені локальні теореми єдиності, існування та стійкості його розв'язку на деякій компактній множині.

При вивченні шаруватих структур введемо клас Нумерова $Nu^{(k,\alpha)}(\sigma,\Pi)=S_{loc}(D)\times C^{(k,\alpha)}(R^{(1)})$ як декартовий добуток множини $S_{loc}(D)$ обмежених і (майже всюди) локально інтегрованих функцій, що описують густину $\sigma=\sigma(x,y)$, $(x,y)\in D$ мас в області $D\subset R^{(2)}$ площини $R^{(2)}=R^{(1)}\times R^{(1)}$ та сукупності $C^{k,\alpha}(R^{(1)})$, $k=0,1,...,;$ $0<\alpha\le 1$ функцій $y=\zeta(x)$, $x\in R^{(2)}$, неперевних (за Гельдером) з їхніми похідними до k-го порядку включно з показником α, що описують контакти різнорідних шарів зі смуги $\Pi=\{(x,y):\ -\infty<x<\infty;\ 0<\zeta(x)\le h_0\}$, де h_0 – обмежена стала. Надалі символами $Nu^{(k,\alpha)}(1,\Pi)$ і $Nu^{(k,\alpha)}(\sigma,\Pi)$ позначимо класи відповідно сталих і змінних густин утворень в D.

Розглянемо структурну задачу гравіметрії в комплексній площині $z=x+iy$. У роботі [1] така задача була редукована до розв'язання на класі $Nu^{(k,\alpha)}(1,\Pi)$ нелінійного інтегрального рівняння типу Урисона, що має такий вигляд:

$$-\frac{s_0-\bar{s}_0}{2}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D_2}\frac{s-\bar{s}-s_0+\bar{s}_0}{s-z}ds=u(z),$$

де $u(z)=G(z)/\pi f\sigma$ – калібрована напруга $G(z)$ поля логарифмічного потенціалу тяжіння $U(z)$, де $G(z)=\frac{\partial U(z)}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}-i\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}\right)$; f – гравітаційна стала; σ – густина активного шару; $s_0=x+i\zeta(x)$, $s=\xi+i\zeta(\xi)$ – відповідно фіксована точка контура ∂D і точка, що його пробігає, а $\bar{s}_o=x-i\zeta(x)$, $\bar{s}=\xi-i\zeta(\xi)$ – спряжені з ними точки. Перетворимо наведене рівняння до зручнішого для дослідження за допомогою наступного твердження.

Лема. *Якщо контур ∂D: $y=\zeta(x)$, $x\in R^{(1)}$ належить до класу $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ неперервно диференційованих (за Гельдером) функцій, то*

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{ds}{s-z}=\begin{cases}+1, & z\in D^+,\\ -1, & z\in D^-\end{cases}.$$

де D^+ – область над кривою ∂D , а D^- – область під кривою ∂D.

Доведення леми елементарне і засноване на обчисленні відповідного криволінійного інтеграла від аналітичної функції $f(s)=1/(s-z)$ у незамкнутій області $D^+\setminus\{z\}$ (або в області $D^-\setminus\{z\}$) з виколотою точкою z.

На підставі леми це нелінійне інтегральне рівняння можна переписати в такому вигляді:

$$-(s_0-\bar{s}_0)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{s-\bar{s}}{s-z}ds=u(z) \qquad (1)$$

Теорема 1. *Якщо контур ∂D: $y=\zeta(x)$, $x\in R^{(1)}$ належить класу Нумерова $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$, тобто задовольняє вимоги $\|\zeta(x)\|_C\le M$; $\|\zeta'(x)\|_C\le m$, $m,M<\infty$, то оператор прямої задачі*

$$A(\zeta;z)=-(s_0-\bar{s}_0)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{s-\bar{s}}{s-z}ds$$

є обмеженим, неперервним і компактним оператором на $C\left(R^{(1)}\right)$.

Доведення *обмеженості* оператора з посиланням на лему не становить труднощів. Для доведення його *неперервності* розглянемо різницю

$$A(\zeta+\eta;z)-A(\zeta;z)=-2i\eta(x)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{s^{*}-\bar{s}^{*}}{s^{*}-z}ds^{*}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{s-\bar{s}}{s-z}ds,$$

і врахуємо, що $s^{*}=\xi+i\zeta+i\eta=s+i\eta$, ∂D^{*}: $y=\zeta(x)+\eta(x)$, $x\in R^{(1)}$; $\eta(x)$ – достатньо мала варіація $\zeta(x)$ в тому сенсі, що $\eta(x)$ для довільного числа $\varepsilon>0$ підпорядковується вимогам $\|\eta(x)\|_{C}<\varepsilon$; $\eta(-\infty)=\eta(\infty)=0$. Звідси неважко вивести рівність

$$|A(\zeta+\eta;z)-A(\zeta;z)|\le\frac{7}{2}\|\eta(x)\|<7\varepsilon/2,$$

яка засвідчує неперервність оператора $A(\zeta;z)$ в $C\left(R^{(1)}\right)$ через те, що число $\varepsilon>0$ довільне.

Для доведення *компактності* (повної неперервності) оператора $A(\zeta;z)$ покажемо, що він переводить довільну обмежену множину неперервно диференційованих функцій, зокрема клас $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$, в компактну (за метрикою $C\left(R^{(1)}\right)$) множину функцій $u(z)=A(\zeta;z)\in V(A)$.

Досить послатися на обмеженість оператора і лему, щоб отримати нерівність $\|u(z)\|_{C}\le 3\|\zeta(x)\|_{C}<3M$, з якої випливатиме *рівномірна обмеженість* множини $V(A)$. Її *одностайна неперервність* доводиться так. Для точок z_k, $k=1,2$, що підпорядковуються нерівності $|z_1-z_2|<\varepsilon$ для довільного числа $\varepsilon>0$, матимемо

$$u(z_1)-u(z_2)=2i[\zeta(x_2)-\zeta(x_1)]+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\left(\frac{s-\bar{s}}{s-z_1}-\frac{s-\bar{s}}{s-z_2}\right)ds.$$

Цю різницю з посиланням на близькість точок z_k, $k=1,2$, та належність функції $\zeta(x)$ до класу $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ можна оцінити таким чином:

$$\|u(z_1)-u(z_2)\|_{C}\le 2\|\zeta'(x)\|_{C}\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{s-\bar{s}}{(s-z)^{2}}ds\right|<\varepsilon(2m+1/2).$$

Одержана нерівність означає, що множина $V(A)$ функцій $u(z)$ є одностайно неперервною. За відомою теоремою Арцела [2], множина $V(A)$ є *компактною*, а оператор $A(\zeta;z)$ – *цілком неперервним* (*компактним*) у метриці простору неперервних функцій.

Оскільки оператор $A(\zeta;z)$ неперервний, принаймні, на класі $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$, то щонайменше тільки на цьому класі потрібно відшукувати розв'язки рівняння (1) для вхідних даних з просторів $C\left(R^{(1)}\right)$ або $L^{(k)}\left(R^{(1)}\right)$, $k=1,2$.

Теорема 2 (єдиності). *Розв'язок нелінійного інтегрального рівняння (1), якщо він існує, єдиний на множині* $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ *неперервно диференційованих функцій.*

Дійсно, однорідне нелінійне рівняння

$$-(s_0-\bar{s}_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{s-\bar{s}}{s-z}ds=0 \qquad (2)$$

на множині $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ має тільки тривіальний розв'язок. У цьому нас переконує суперечлива нерівність

$$\|s_0-\bar{s}_0\|_{C}=\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{s-\bar{s}}{s-z}ds\right\|_{C}\le\frac{1}{2}\|s-\bar{s}\|\left|\frac{1}{\pi i}\int_{\partial D}\frac{ds}{s-z}\right|\le\frac{1}{2}\|s-\bar{s}\|_{C},$$

яка виводиться на основі леми.

Отже, однорідне рівняння (2) має тільки тривіальний розв'язок, а рівняння (1), якщо має розв'язок, то він однозначно визначається на класі $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$.

Оскільки довільну функцію $\zeta(x)$ з множини $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ можна подати у вигляді

$$\zeta(x)=\zeta(0)+\int_0^x \zeta'(t)dt,$$

очевидно, що множина функцій $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ рівномірно обмежена і одностайно неперервна, тобто є *компактною* множиною функцій.

Теорема 3 (існування). *Процес послідовних наближень*

$$s_0^{(n+1)}-\bar{s}_0^{(n+1)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^{(n)}}\frac{s^{(n)}-\bar{s}^{(n)}}{s^{(n)}-z}ds^{(n)}-u(z),\ n=0,1,2,...,;\ s^{(0)}-\bar{s}^{(0)}=u(z)$$

збігається на компактній множині $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ *до (нормального) розв'язку нелінійного інтегрального рівняння (1) зі швидкістю геометричної прогресії.*

Для доведення цієї теореми достатньо показати збіжність ітераційного процесу і визначити його швидкість. Щодо твердження стосовно того, що гранична функція $\zeta(x)$ послідовності $\{\zeta^{(n)}(x)\}$ буде розв'язком нелінійного інтегрального рівняння (1), то воно випливатиме з теореми єдиності розв'язку.

Перейдемо до з'ясування збіжності послідовних наближень. Розглянемо різницю

$$\left(s_0^{(n+1)}-\bar{s}_0^{(n+1)}\right)-\left(s_0^{(n)}-\bar{s}_0^{(n)}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^{(n)}}\frac{s^{(n)}-\bar{s}^{(n)}}{s^{(n)}-z}ds^{(n)}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^{(n)}}\frac{s^{(n-1)}-\bar{s}^{(n-1)}}{s^{(n-1)}-z}ds^{(n-1)}.$$

Для спрощення викладок позначимо $s_0^{(n+1)}-s_0^{(n)}=i\left(\zeta^{(n+1)}-\zeta^{(n)}\right)=i\eta^{(n)},\ n-0,1,2,...,$ і, скориставшись тим, що прирости $\eta^{(n)}$ за метрикою простору неперервних функцій набагато менші самих наближень $\zeta^{(n)}$ контуру ξ, будемо мати таке співвідношення

$$\eta^{(n)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^{(n-1)}}\left[\frac{2\eta^{(n-1)}}{s^{(n-1)}-z}-\eta^{(n-1)}\frac{s^{(n-1)}-\bar{s}^{(n-1)}}{\left(s^{(n-1)}-z\right)^2}\right]ds^{(n-1)},$$

з якого встановлюємо нерівність

$$\left\|\eta^{(n)}\right\|_C\le\frac{1}{2\pi}\left\|\eta^{(n-1)}\right\|_C\left|\int_{\partial D^{(n-1)}}\left[\frac{2}{s^{(n-1)}-z}-\frac{s^{(n-1)}-\bar{s}^{(n-1)}}{\left(s^{(n-1)}-z\right)^2}\right]ds^{(n-1)}\right|\le\frac{1}{2}\left\|\eta^{(n-1)}\right\|_C.$$

Ця нерівність буде підставою для ланцюжка

$$\left\|\zeta^{(n+1)}-\zeta^{(n)}\right\|_C\le 2^{-1}\left\|\zeta^{(n)}-\zeta^{(n-1)}\right\|_C\le 2^{-2}\left\|\zeta^{(n-1)}-\zeta^{(n-2)}\right\|_C\le...\le 2^{-n}\left\|\zeta^{91}-\zeta^{(0)}\right\|_C,$$

який, у свою чергу, засвідчує, що оператор $A(\zeta;z)$ задачі для контактної поверхні є *стискаючим*. Наближення $\zeta^{(n)}(x),\ n=0,1,2,...$, збігаються до розв'язку $\zeta(x)$ рівняння (1) зі швидкістю геометричної прогресії зі знаменником 2^{-n}.

Отже, в процесі доведення теореми існування розв'язку знайдено послідовність $\{B(u,\zeta^{(n)};z)\}$ компактних операторів

$$B(u,\zeta^{(n)};z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^{(n)}}\frac{s^{(n)}-\bar{s}^{(n)}}{s^{(n)}-z}ds^{(n)}-u(z),$$

котра обмежену множину $V(A)$ функцій $u(z)$ одно-однозначно проектує на компакт $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ і прямує за метрикою простору неперервних функцій на певному елементі $u(z)$ множини $V(A)$ до нелінійного оберненого оператора рівняння для контактної поверхні.

Теорема 4 (стійкості). *Нехай функції* $\zeta_i(x),\ x\in R^{(1)},\ i=1,2$, *що описують межі поділу однорідних шаруватих середовищ, належать до класу* $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$. *Якщо за достатньо малого числа* $\varepsilon>0$ *поля* $u_i(z),\ z\in R^{(1)}$, *які породжуються відповідно контурами* $\zeta_i(x)$, *підпорядковуються умові* $\left\|u_1(z)-u_2(z)\right\|_C\le\varepsilon$, *тобто вважаються близькими, то самі межі та-*

кож незначно відрізняються одна від одної в сенсі виконання умови $\left\|\zeta_1(x)-\zeta_2(x)\right\|_C \le 2\varepsilon$.

Для доведення теореми достатньо послатися на оцінку

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\partial D^{(1)}}\frac{\zeta_1(\xi)-\zeta_2(\xi)}{s^{(1)}-z}ds^{(1)}+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\zeta_2(\xi)\left[\frac{1+i\zeta_1'(\xi)}{\xi+i\zeta_1(\xi)-z}-\frac{1+i\zeta_2'(\xi)}{\xi+i\zeta_2(\xi)-z}\right]d\xi\right|\le\frac{1}{2\pi}\left\|\zeta_1(\xi)-\zeta_2(\xi)\right\|_C.$$

Доведення теореми стійкості завершує дослідження умов коректної розв'язності оберненої задачі логарифмічного потенціалу для контактної поверхні в комплексній площині.

Задача поставлено коректно на компактній множині $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ неперервних разом з першими похідними функцій саме тому, що на класі $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ розв'язок задачі не тільки існує, а водночас єдиний і стійкий.

1. *Старостенко В.И., Черная* Я.Я., *Черный А.В.* Интегральное уравнение обратной задачи потенциала для контактной поверхности // Докл. АН УССР. Сер. Б. - 1988. - № 2. - С. 25-29.
2. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. - М.: Наука, 1977. – 744 с.

Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 31.07. 2001

A.V. Chornii, Yu.I. Dubovenko

To the theory of the structural gravimetry problem in complex domain

A new nonlinear integral equation for the contact problem in a complex domain, depending only on one parameter, the attractive layer density, is investigated. The local theorems of uniqueness, existence and stability of its solution on a certain compact manifold are proved.

Опубліковано в ДАНУ № 4, 2002. – С. 145-149.